

VIŠEDIMENZIONALNI KONTINUALNI SIGNALI

Višedimenzionani signali opisuju fizičke pojave koje zavise od dvije ili više nezavisnih varijabli. *N-dimenzionalni signal* je matematička funkcija N nezavisnih varijabli. Nezavisne varijable se zapisuju u obliku uređenih N -torki (t_1, t_2, \dots, t_N) ili vektora $\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_N]^T \in \mathbb{R}^N$, gdje T označava operaciju transponovanja. Shodno usvojenom stilu označavanja nezavisnih varijabli, N -dimenzionalni signal zapisujemo sa $x(t_1, t_2, \dots, t_N)$ ili $x(\mathbf{t})$. N -dimenzionalni signal je *kontinualan* ako su sve njegove nezavisne varijable kontinualne. Ako su sve nezavisne varijable diskretne i N -dimenzionalni signal je *diskretan*. Ukoliko su neke nezavisne varijable kontinualne a druge diskretne, kažemo da se radi o *mješovitom* N -dimenzionalnom signalu. Radi lakšeg pisanja u nastavku ćemo koristiti skraćenicu „ND“ za „ N -dimenzionalni“.

U praksi su od posebnog značaja 2D i 3D signali. Slike su 2D signali koji opisuju promjenu svjetline u prostoru. Umjesto oznake (t_1, t_2) za nezavisne varijable češće se kod 2D signala koji opisuju prostornu zavisnot neke fizičke veličine koriste oznake (x_1, x_2) ili (x, y) za nezavisne varijable, a sam signal označava sa $f(x_1, x_2)$ ili $f(x, y)$. Kao primjere 3D signala možemo navesti 3D holografske slike i video signale. Za razliku od 3D slika koje su funkcije tri prostorne nezavisne varijable i najčešće označene sa $f(x, y, z)$, video signal je funkcija dvije prostorne i jedne vremenske nezavisne varijable, pa je pogodan način označavanja $f(x, y, t)$.

8.1 Osnovni višedimenzionalni signali

U analizi i obradi višedimenzionalnih signala značajnu ulogu imaju ND jedinični odskočni signal, ND pravougaoni impuls, ND Dirakov impuls, te ND eksponencijalni i sinusni signali. Posebnu klasu čine separabilni višedimenzionalni signali koji se formiraju u obliku proizvoda više 1D signala.

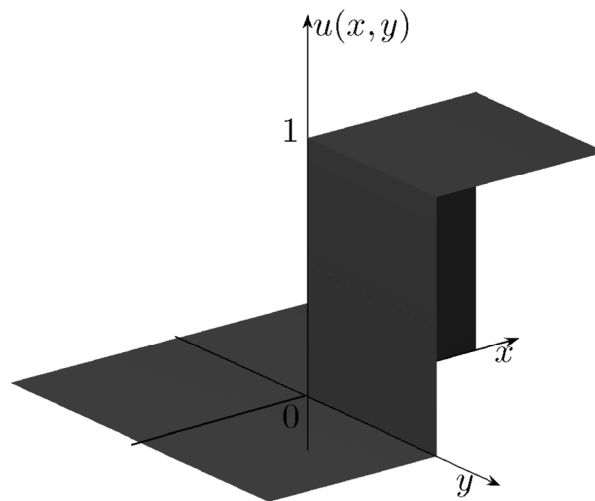
8.1.1 ND jedinični odskočni signal

ND jedinični odskočni signal se definiše sa:

$$u(\mathbf{t}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^N \\ 0, & \mathbf{t} \in \mathbb{R}_-^N \end{cases}, \quad (8.1)$$

gdje je \mathbb{R}_+^N skup vektora čije su sve komponente pozitivne, dok je \mathbb{R}_-^N skup vektora čije su sve komponente negativne. Vrijednosti signala za vektore čija je bar jedna komponenta jednaka nuli nisu definisane.

2D jedinični odskočni signal je definisan sa:



Slika 8.1 2D jedinični odskočni signal.

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & x > 0 \wedge y > 0 \\ 0, & x < 0 \vee y < 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

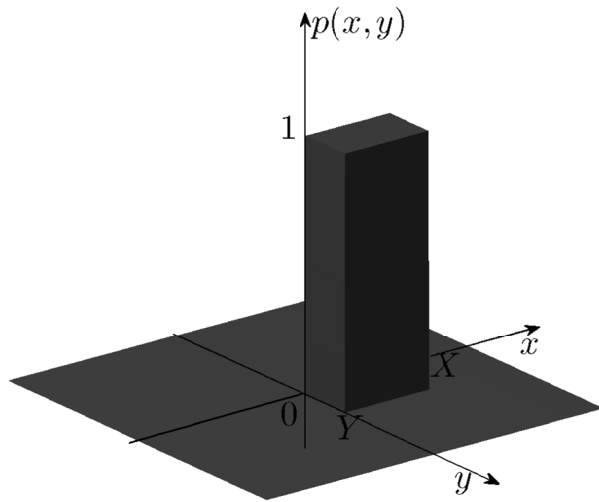
i prikazan na Slici 8.1. Vrijednosti signala za $x=0 \wedge y \geq 0$ i $x \geq 0 \wedge y=0$ nisu definisane.

8.1.2 ND pravougaoni impuls

ND pravougaoni impuls se definiše sa:

$$p(\mathbf{t}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{t} \in \mathbb{R}_{T+}^N \\ 0, & \mathbf{t} \in \mathbb{R}_{T-}^N \end{cases}, \quad (8.3)$$

gdje je \mathbb{R}_{T+}^N skup vektora čije su sve komponente ograničene tako da je



Slika 8.2 2D pravougaoni impuls.

$|t_i| < \frac{T_i}{2}$, $i=1,2,\dots,N$, $T_i > 0$, a $\mathbb{R}_{\mathbf{r}-}^N$ skup vektora čije su sve komponente ograničene tako da je $|t_i| > \frac{T_i}{2}$, $i=1,2,\dots,N$, $T_i > 0$. Vrijednosti signala za vektore čija je bar jedna komponenta $t_i = 0$ ili $t_i = \pm \frac{T_i}{2}$ nisu definisane.

Kao primjer ND pravougaonog impulsa posmatrajmo kauzalni 2D pravougaoni impuls definisan sa:

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{X}{2} \wedge |y| < \frac{Y}{2} \\ 0, & |x| > \frac{X}{2} \vee |y| > \frac{Y}{2} \end{cases} \quad (8.4)$$

Ovaj pravougaoni impuls je prikazan na Slici 8.2. Vrijednosti signala za $x=0 \wedge 0 \leq y \leq Y$, $x=X \wedge 0 \leq y \leq Y$, $0 \leq x \leq X \wedge y=0$ i $0 \leq x \leq X \wedge y=Y$ nisu definisane.

8.1.3 ND Dirakov impuls

ND Dirakov impuls je ND signal koji za $\mathbf{t} = \vec{0}$ ima beskonačno veliku vrijednost, dok je za sve ostale vrijednosti vektora \mathbf{t} jednak nuli:

$$\delta(\mathbf{t}) = \begin{cases} \infty, & \mathbf{t} = \vec{0} \\ 0, & \mathbf{t} \neq \vec{0} \end{cases} \quad (8.5)$$

sa osobinom da je:

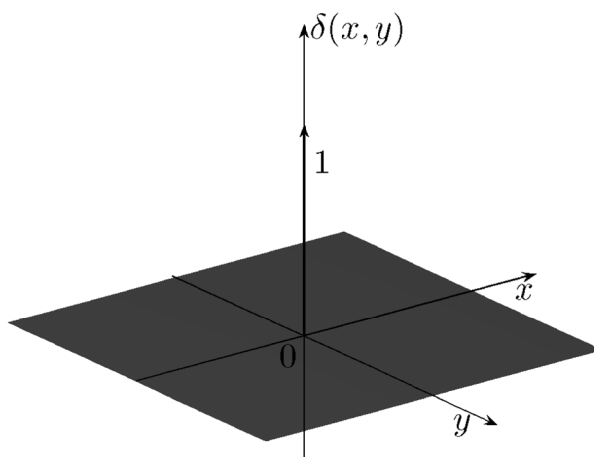
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_1, t_2, \dots, t_N) dt_1 dt_2 \dots dt_N = \int_{0_-}^{0_+} \int_{0_-}^{0_+} \cdots \int_{0_-}^{0_+} \delta(t_1, t_2, \dots, t_N) dt_1 dt_2 \dots dt_N = 1. \quad (8.6)$$

2D Dirakov impuls definisan sa:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \wedge y = 0 \\ 0, & x \neq 0 \vee y \neq 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = \int_{0_-}^{0_+} \int_{0_-}^{0_+} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad (8.8)$$

je prikazan na Slici 8.3.



Slika 8.3 2D Dirakov impuls.

8.1.4 ND kompleksni eksponencijalni i sinusni signali

Kako bismo opisali ND kompleksne eksponencijalne signale, definišimo ND vektor kompleksnih učestanosti sa:

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_N] \in \mathbb{C}^N, \quad (8.9)$$

gdje je $s_i = \sigma_i + j\Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Vektor ugaonih učestanosti je definisan sa:

$$\mathbf{\Omega} = [\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N] \in \mathbb{R}^N. \quad (8.10)$$

ND kompleksni eksponencijalni signal se definiše sa:

$$x(\mathbf{t}) = C\alpha^{\mathbf{st}}, \quad (8.11)$$

gdje su C i α u opštem slučaju kompleksne konstante. Za $C, \alpha \in \mathbb{R}$ signal dat sa (8.11) postaje ND realni eksponencijalni signal. Primjer 2D realnog eksponencijalnog signala je dat sa:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{-x-y}, & x > 0 \wedge y > 0 \\ 2^{-x+y}, & x > 0 \wedge y < 0 \\ 2^{x-y}, & x < 0 \wedge y > 0 \\ 2^{x+y}, & x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}, \quad (8.12)$$

ND eksponencijalni signal:

$$x(\mathbf{t}) = Ce^{j\mathbf{\Omega}_0\mathbf{t}} \quad (8.13)$$

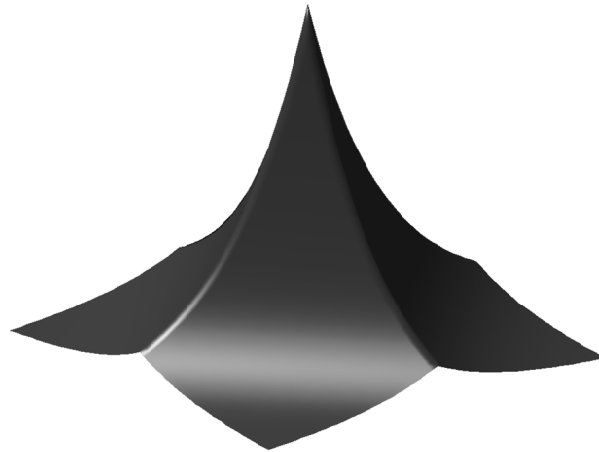
je periodičan po svakoj nezavisnoj varijabli sa osnovnim periodom $T_{0i} = \frac{2\pi}{\Omega_{0i}}$.

Uz $C = |C|e^{j\theta}$ (8.12) možemo zapisati u obliku:

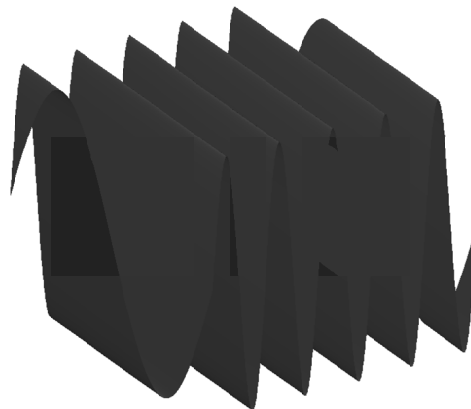
$$x(\mathbf{t}) = |C|e^{j(\mathbf{\Omega}_0\mathbf{t} + \theta)} = |C|\cos(\mathbf{\Omega}_0\mathbf{t} + \theta) + j|C|\sin(\mathbf{\Omega}_0\mathbf{t} + \theta). \quad (8.14)$$

Opšti oblik ND sinusnih signala je dat sa:

$$x(\mathbf{t}) = |C|\cos(\mathbf{\Omega}_0\mathbf{t} + \theta). \quad (8.15)$$



Slika 8.4 2D eksponencijalni signal (8.15).



Slika 8.5 Primjer 2D sinusnog signala.

Signal dat sa (8.12) prikazan je na Slici 8.4, dok je na Slici 8.5 prikazan primjer 2D sinusnog signala. Napomenimo da su prilikom generisanja slika u ovoj knjizi korišćene numeričke metode, te signale prikazane na slikama treba posmatrati kao aproksimacije stvarnih kontinualnih signala koje predstavljaju.

8.1.5 Separabilni ND signali

Ako se višedimenzionalni signal može napisati u obliku proizvoda jednodimenzionalnih signala, takve višedimenzionalne signale nazivamo *separabilnim signalima*. U obradi višedimenzionalnih signala posebno su interesantni *separabilni sinusni signali* definisani sa:

$$x(t_1, t_2, \dots, t_N) = \sin(\Omega_1 t_1) \sin(\Omega_2 t_2) \cdots \sin(\Omega_N t_N). \quad (8.16)$$

Realni i imaginarni dijelovi ND kompleksnih signala definisanih sa (8.13) sačinjeni su od separabilnih sinusnih signala. Pokazaćemo to na primjeru 2D signala:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{j(\Omega_x x + \Omega_y y)} = e^{j\Omega_x x} e^{j\Omega_y y} = \\ &= [\cos(\Omega_x x) + j \sin(\Omega_x x)] [\cos(\Omega_y y) + j \sin(\Omega_y y)]. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Realni i imaginarni dijelovi ovog signala su dati sa:

$$\operatorname{Re}\{f(x, y)\} = \cos(\Omega_x x) \cos(\Omega_y y) - \sin(\Omega_x x) \sin(\Omega_y y), \quad (8.18)$$

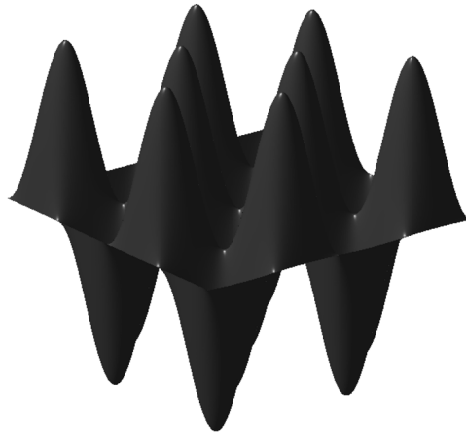
$$\operatorname{Im}\{f(x, y)\} = \sin(\Omega_x x) \cos(\Omega_y y) + \cos(\Omega_x x) \sin(\Omega_y y). \quad (8.19)$$

Oblik 2D separabilnog sinusnog signala $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ prikazan je na Slici 8.6.

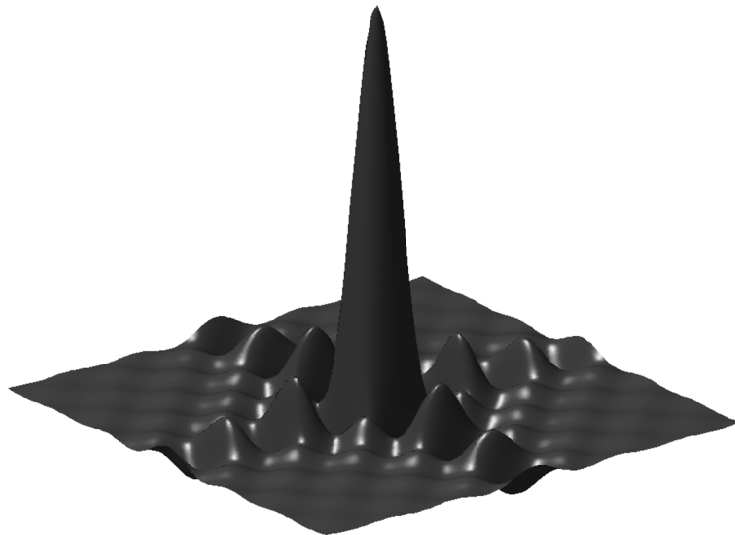
Na sličan način se definiše *separabilni sinc signal*:

$$f(x, y) = \operatorname{sinc}(x) \operatorname{sinc}(y). \quad (8.20)$$

Oblik 2D separabilnog sinc signala prikazan je na Slici 8.7.



Slika 8.6 Separabilni 2D sinusni signal.



Slika 8.7 Separabilni 2D sinc signal.

8.2 Obrada višedimenzionalnih signala u vremenskom domenu

Višedimenzionalni kontinualni sistem transformiše višedimenzionalni kontinualni ulazni signal u višedimenzionalni kontinualni izlazni signal. Za ND sistem tu transformaciju zapisujemo sa:

$$y(t_1, t_2, \dots, t_N) = \mathcal{F}\{x(t_1, t_2, \dots, t_N)\}, \quad (8.21)$$

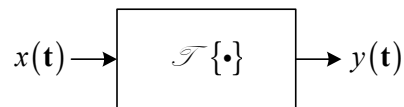
ili kraće sa:

$$y(\mathbf{t}) = \mathcal{F}\{x(\mathbf{t})\}, \quad (8.22)$$

odnosno:

$$y(\mathbf{t}) = \mathcal{F}\{x(\mathbf{t})\}, \quad (8.23)$$

Blok dijagram višedimenzionalnog kontinualnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom prikazan je na Slici 8.8.



Slika 8.8 Blok dijagram višedimenzionalnog kontinualnog sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom.

Višedimenzionalni sistem je *linearan* ako vrijedi da je:

$$\mathcal{F}\{ax_1(\mathbf{t}) + bx_2(\mathbf{t})\} = a\mathcal{F}\{x_1(\mathbf{t})\} + b\mathcal{F}\{x_2(\mathbf{t})\}, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}. \quad (8.24)$$

Ako pomak ulaznog signala za vektor \mathbf{t}_0 uzrokuje samo pomak izlaznog signala za isti vektor, bez promjene oblika signala, kažemo da je višedimenzionalni sistem *invarijantan na pomak*. To formalno zapisujemo sa:

$$x(\mathbf{t}) \rightarrow y(\mathbf{t}) \Rightarrow x(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0) \rightarrow y(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0), \quad (8.25)$$

a takve sisteme kratko zovemo LSI (Linear shift-invariant) sistemi.

Višedimenzionalni sistemi se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Uz poznatu pobudu, odziv sistema je moguće odrediti njihovim rješavanjem.

Osim rješavanjem parcijalnih diferencijalnih jednačina, odziv LSI ND sistema sa impulsnim odzivom $h(t_1, t_2, \dots, t_N)$ na pobudni signal $x(t_1, t_2, \dots, t_N)$ se može odrediti koristeći *višedimenzionalnu konvoluciju*:

$$\begin{aligned} y(t_1, t_2, \dots, t_N) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, \dots, t_N - \tau_N) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N = \quad (8.26) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, \dots, t_N - \tau_N) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N. \end{aligned}$$

Kratko pišemo:

$$y(\mathbf{t}) = h(\mathbf{t}) * x(\mathbf{t}) = x(\mathbf{t}) * h(\mathbf{t}). \quad (8.27)$$

Primjer konvolucije 2D signala prikazan je na Slici 8.9, pri čemu je rezultat konvolucije normalizovan po amplitudi.

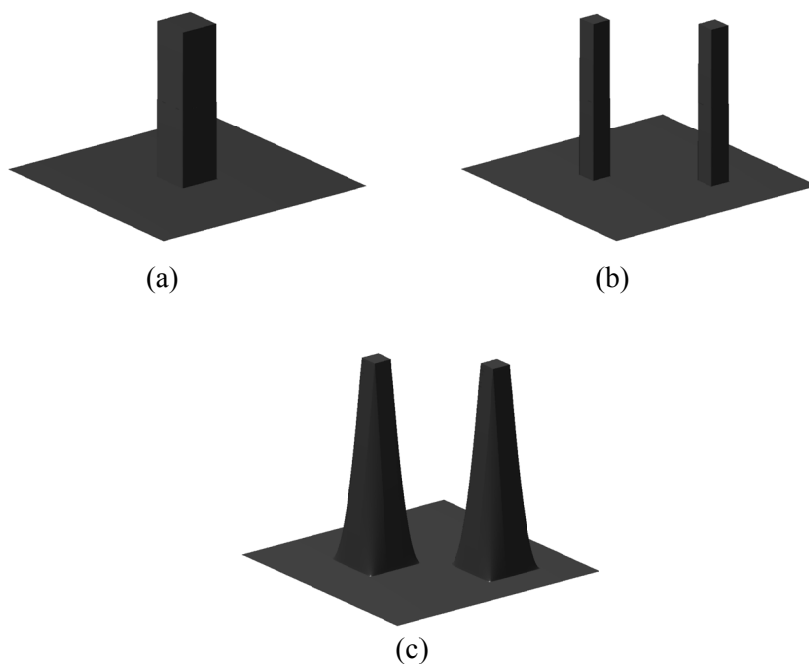
8.3 Višedimenzionalni Furijeov red

Višedimenzionalni periodični signali mogu se razviti u *višedimenzionalni Furijeov red*, koji za ND signale ima oblik:

$$\tilde{x}(\mathbf{t}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_N=-\infty}^{\infty} C_{k_1, k_2, \dots, k_N} e^{j\mathbf{k}\Omega_0 \mathbf{t}}, \quad (8.28)$$

$\Omega_{0i} = \frac{2\pi}{T_{0i}}$, $\mathbf{k}\Omega_0 = [k_1\Omega_{01}, k_2\Omega_{02}, \dots, k_N\Omega_{0N}]$, sa koeficijentima:

$$C_k = \frac{1}{T_{01}T_{02} \cdots T_{0N}} \int_{T_{01}} \int_{T_{02}} \cdots \int_{T_{0N}} \tilde{x}(\mathbf{t}) e^{-j\mathbf{k}\Omega_0 \mathbf{t}} dt_1 dt_2 \cdots dt_N, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N. \quad (8.29)$$



Slika 8.9 Primjer konvolucije 2D signala: (a,b) signali; (c) rezultat konvolucije.

8.4 Višedimenzionalna Furijeova transformacija

Za analizu višedimenzionalnih neperiodičnih signala koristimo *višedimenzionalnu Furijeovu transformaciju*. ND direktna i inverzna Furijeova transformacija se definiše sa:

$$X(\mathbf{\Omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x(\mathbf{t}) e^{-j\mathbf{\Omega}\mathbf{t}} dt_1 dt_2 \cdots dt_N, \quad (8.30)$$

$$x(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} X(\boldsymbol{\Omega}) e^{j\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t}} d\Omega_1 d\Omega_2 \cdots d\Omega_N. \quad (8.31)$$

ND Furijeova transformacija ima slične osobine kao 1D Furijeova transformacija. Njihovo razmatranje izlazi van okvira ove knjige. Naglasićemo samo da je prilikom odmjjeravanja višedimenzionalnih sistema neophodno zadovoljiti Nikvistov kriterij tako da učestanost odmjjeravanja signala po svakoj nezavisnoj varijabli t_i bude bar dva puta veća od odgovarajuće gornje granične učestanosti Ω_{gi} spektra signala. Ispunjenje ovog uslova garantuje idealnu rekonstrukciju signala. Ako učestanost odmjjeravanja označimo sa $\Omega_{si} = \frac{2\pi}{\Delta t_i}$, pri čemu je Δt_i korak odmjjeravanja po nezavisnoj varijabli t_i , Nikvistov kriterij se može zapisati sa:

$$\Omega_{si} \geq 2\Omega_{gi}. \quad (8.32)$$

ND Furijeova transformacija omogućava obradu signala u ND frekvencijskom domenu. Označimo sa $\mathcal{ND}\mathcal{F}$ ND Furijeovu transformaciju, a sa $\mathcal{ND}\mathcal{F}^{-1}$ inverznu ND Furijeovu transformaciju. Neka je sistem za obradu ND signala sa impulsnim odzivom $h(\mathbf{t})$ pobuđen signalom $x(\mathbf{t})$. Slično kao kod 1D signala, obrada ND signala u frekvencijskom domenu se provodi kroz sljedeći niz koraka:

$$H(\boldsymbol{\Omega}) = \mathcal{ND}\mathcal{F} \{h(\mathbf{t})\}, \quad (8.33)$$

$$X(\boldsymbol{\Omega}) = \mathcal{ND}\mathcal{F} \{x(\mathbf{t})\}, \quad (8.34)$$

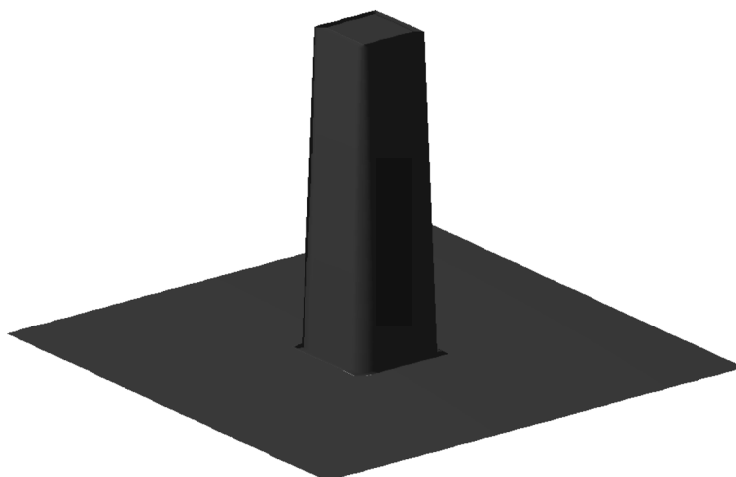
$$Y(\boldsymbol{\Omega}) = H(\boldsymbol{\Omega}) X(\boldsymbol{\Omega}), \quad (8.35)$$

$$y(\mathbf{t}) = \mathcal{ND}\mathcal{F}^{-1} \{Y(\boldsymbol{\Omega})\}. \quad (8.36)$$

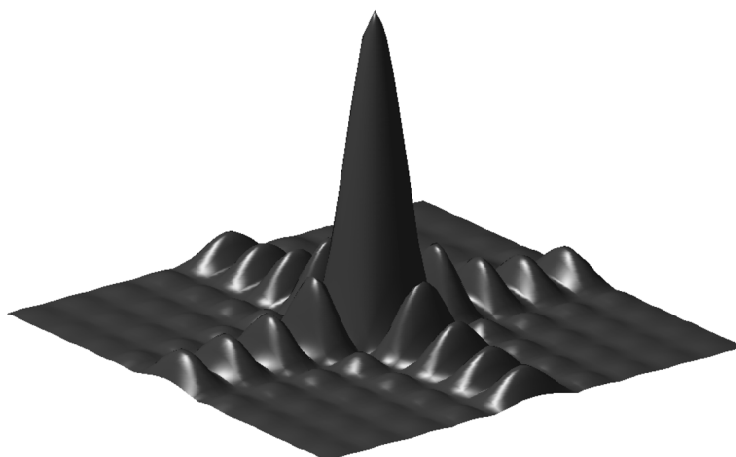
Frekvencijska karakteristika ND sistema se može izraziti kao:

$$H(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{Y(\boldsymbol{\Omega})}{X(\boldsymbol{\Omega})} = \mathcal{ND}\mathcal{F} \{h(\mathbf{t})\}. \quad (8.37)$$

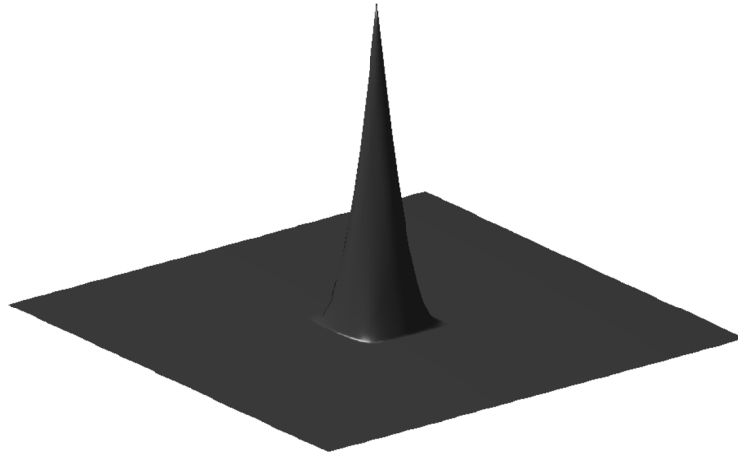
Primjeri 2D neperiodičnih signala i njihovih amplitudnih spektara prikazani su na slikama 8.10-23.



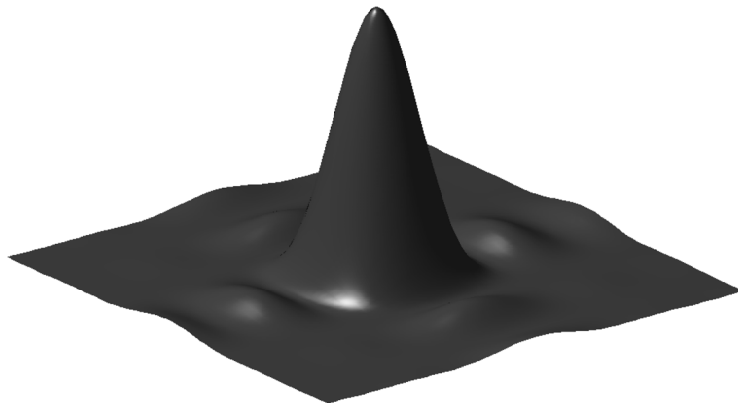
Slika 8.10 2D signal pravougaonog oblika.



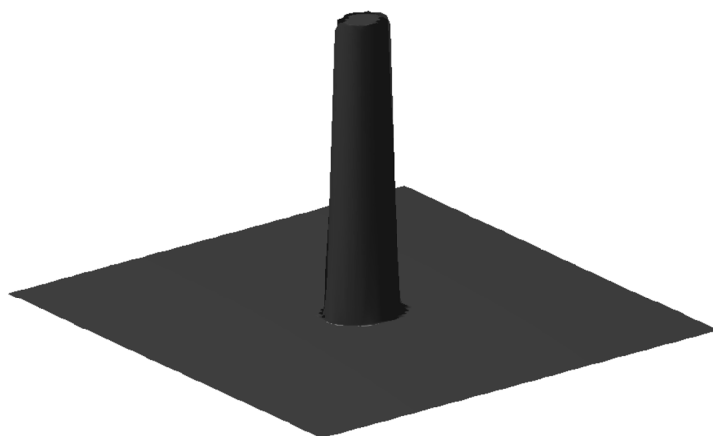
Slika 8.11 Amplitudni spektar 2D signala sa Slike 8.9.



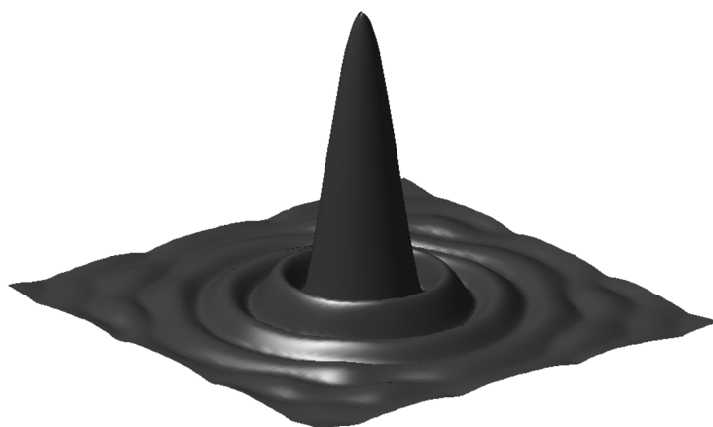
Slika 8.12 2D signal piramidalnog oblika.



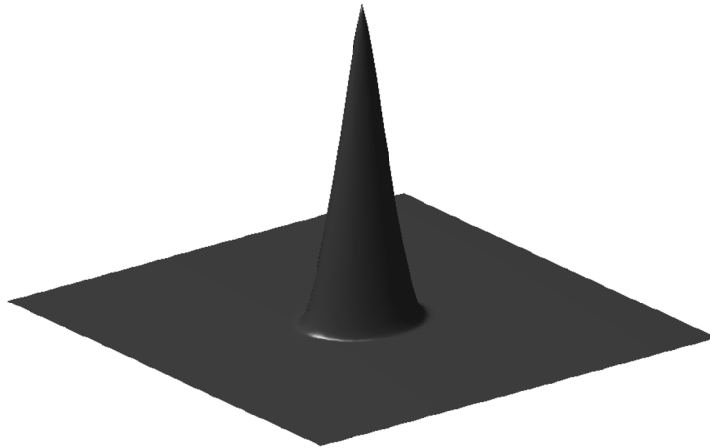
Slika 8.13 Amplitudni spektar 2D signala sa Slike 8.11.



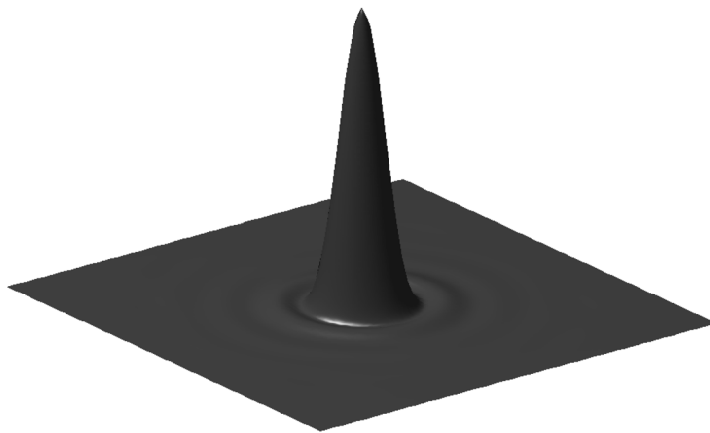
Slika 8.14 2D signal valjkastog oblika.



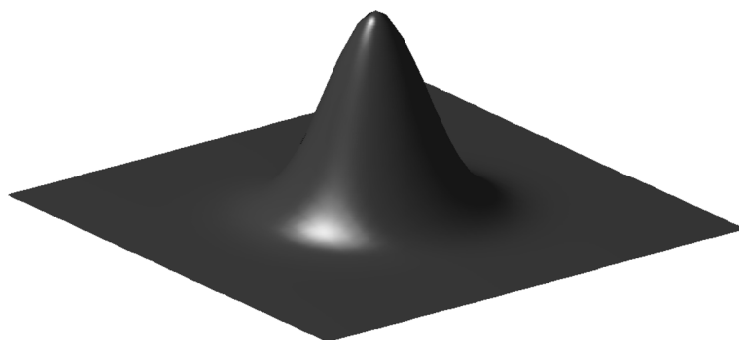
Slika 8.15 Amplitudni spektar 2D signala sa Slike 8.13.



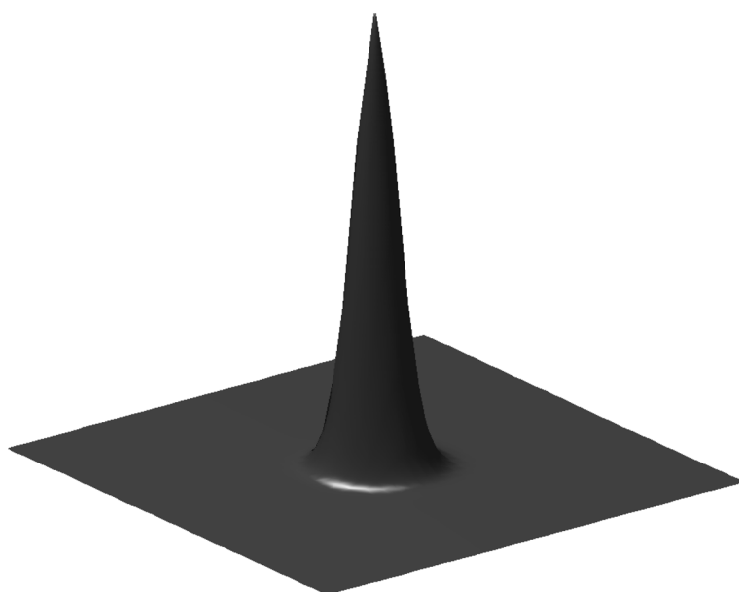
Slika 8.16 2D signal kupastog oblika.



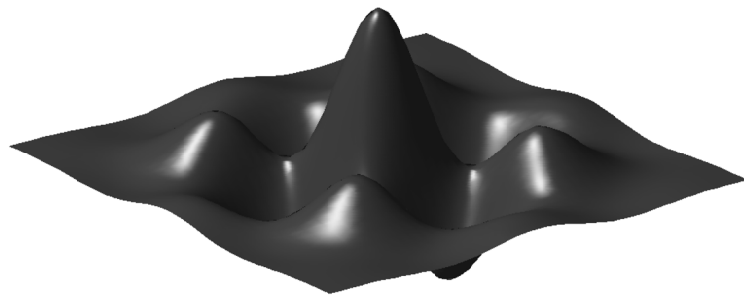
Slika 8.17 Amplitudni spektar 2D signala sa Slike 8.15.



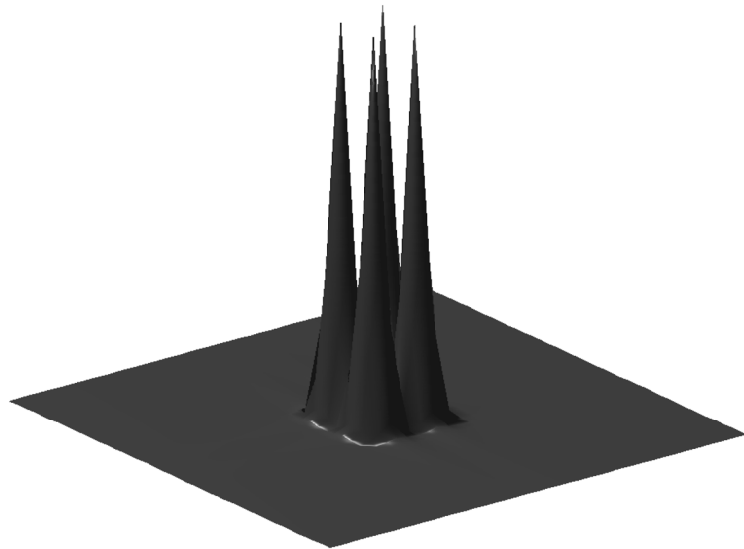
Slika 8.18 2D Gausova funkcija.



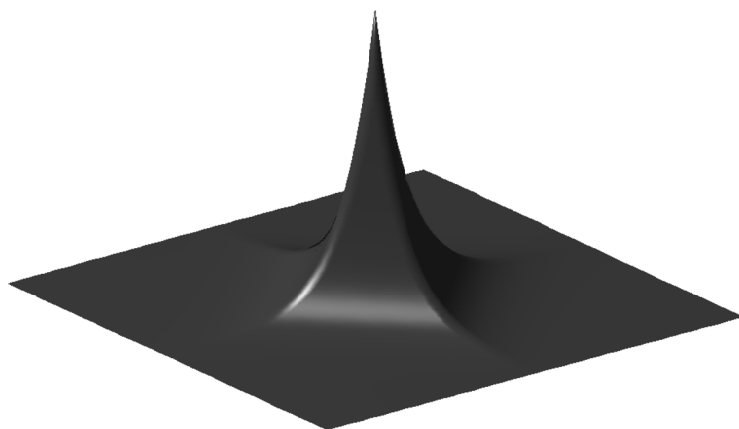
Slika 8.19 Amplitudni spektar 2D Gausove funkcije.



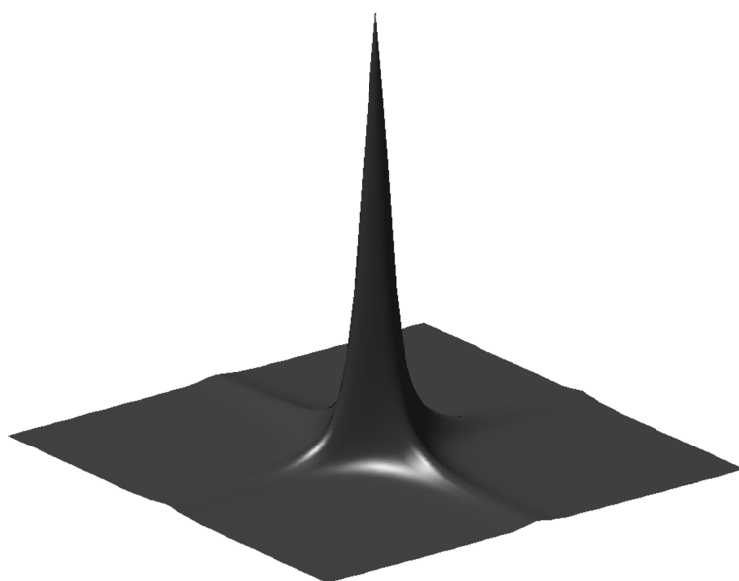
Slika 8.20 2D signal formiran od 2D Gausovih funkcija.



Slika 8.21 Amplitudni spektar 2D signala sa Slike 8.19.



Slika 8.22 2D signal eksponencijalnog oblika.



Slika 8.23 Amplitudni spektar 2D signala sa Slike 8.21.

8.5 Višedimenzionalna Laplasova transformacija

Za višedimenzionalne kontinualne signale definiše se direktna i inverzna *višedimenzionalna Laplasova transformacija* sa:

$$X(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x(\mathbf{t}) e^{-\mathbf{s}\mathbf{t}} dt_1 dt_2 \cdots dt_N, \quad (8.38)$$

$$x(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathbf{s}) e^{\mathbf{s}\mathbf{t}} ds_1 ds_2 \cdots ds_N. \quad (8.39)$$

Označimo sa $\mathcal{L}\mathcal{L}$ ND Laplasovu transformaciju, a sa $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}$ inverznu ND Laplasovu transformaciju i posmatrajmo sistem za obradu ND signala sa impulsnim odzivom $h(\mathbf{t})$ na čiji ulaz je doveden signal $x(\mathbf{t})$. Prelaskom u domen ND Laplasove transformacije, umjesto rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina, traženje odziva ovog sistema se svodi na sljedeći niz koraka:

$$H(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\mathcal{L}\{h(\mathbf{t})\}, \quad (8.40)$$

$$X(\mathbf{s}) = \mathcal{L}\mathcal{L}\{x(\mathbf{t})\}, \quad (8.41)$$

$$Y(\mathbf{s}) = H(\mathbf{s})X(\mathbf{s}), \quad (8.42)$$

$$y(\mathbf{t}) = \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}\{Y(\mathbf{s})\}. \quad (8.43)$$

Funkcija prenosa ND sistema se može izraziti kao:

$$H(\mathbf{s}) = \frac{Y(\mathbf{s})}{X(\mathbf{s})} = \mathcal{L}\mathcal{L}\{h(\mathbf{t})\}. \quad (8.43)$$